MODEL PEMBOBOTAN ADITIF TERMODIFIKASI UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PEMILIHAN *SUPPLIER* MULTI-OBJEKTIF *FUZZY* DENGAN FUNGSI OBJEKTIF *FUZZY* DAN KENDALA *FUZZY* PADA RANTAI *SUPPLY*

Grandianus Seda Mada[1]

[1]*Program Studi Matematika, Universitas Timor Kefamenanu, Jl. KM 09, Sasi, Kefamenanu*
Email: g.seda@mail.ugm.ac.id

ABSTRAK

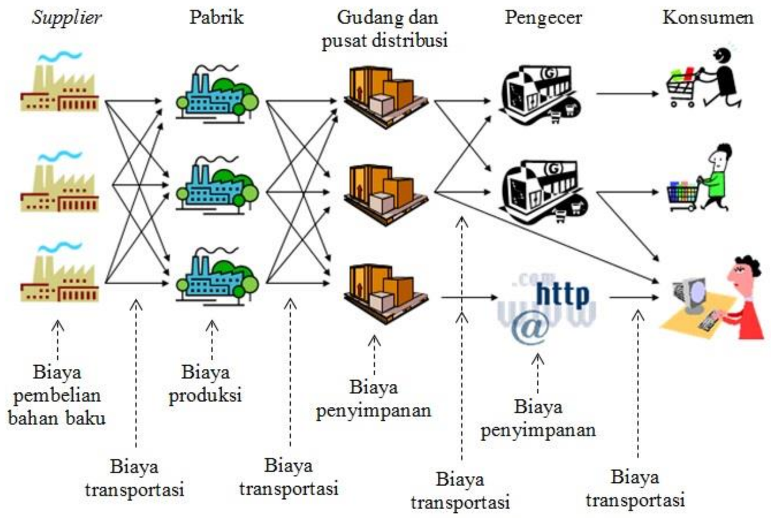
Pemilihan *supplier* merupakan salah satu kegiatan terpenting dalam jaringan rantai *supply* dari sebuah perusahaan. Pemilihan *supplier* dapat dipandang sebagai masalah multi-objektif karena merupakan masalah multi kriteria yang mencakup faktor kualitatif dan kuantitatif. Pada kenyataannya informasi yang berkaitan dengan tujuan dan kendala yang dihadapi dalam masalah pemilihan *supplier* tidak diketahui dengan pasti. Teori himpunan *fuzzy* dapat digunakan pada ketidakjelasan dan ketidaktepatan informasi. Sehingga kemudian masalah pemilihan *supplier* dapat dipandang sebagai program linear multi-objektif *fuzzy*. Sebelumnya telah terdapat dua jenis model yang dikembangkan untuk menyelesaikan masalah pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* yaitu model simetris untuk masalah pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan masing-masing fungsi objektif memiliki tingkat kepentingan yang sama dan satu model lainnya adalah model pembobotan aditif; merupakan model nonsimetris dengan masing-masing fungsi objektif memiliki tingkat kepentingan yang berbeda. Namun berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, kedua model ini masih terbatas untuk menyelesaikan masalah pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan hanya fungsi objektif-nya saja yang bersifat *fuzzy* sementara fungsi kendalanya masih bersifat deterministik. Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, juga diperoleh informasi bahwa terdapat dua definisi bilangan *fuzzy* segitiga. Pada tulisan ini, ditunjukan bahwa kedua definisi bilangan *fuzzy* tersebut ekuivalen, kemudian dengan menggunakan definisi bilangan *fuzzy* segitiga yang baru, model pembobotan aditif dimodifikasi untuk menyelesaikan masalah pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan fungsi objekif *fuzzy* dan kendala *fuzzy*. Dalam menentukan bobot fungsi objektif digunakan pendekatan *Analytic Hierarchy Process*. Model yang diusulkan ini dapat membantu pengambil keputusan untuk mengetahui pesanan yang sesuai untuk setiap *supplier*, dan memungkinkan manajer pembelian mengelolah kinerja rantai *supply* pada biaya, kualitas dan pelayanan. Pada akhirnya diberikan contoh numerik untuk menjelaskan perbedaan dari kedua model setelah dimodifikasi.

Kata kunci: rantai *supply*, pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy*, model pembobotan aditif, *analytic hierarchy process.*

Author : Grandianus Seda Mada

1. PENDAHULUAN

Berdasarkan (Pibernik dan Sucky (2007)) dalam Normayati (2011), Rantai *supply* (*supply chain*) adalah suatu jaringan yang terdiri dari fasilitas-fasilitas berbeda yang tersebar secara geografis, dimana bahan mentah, bahan setengah jadi dan bahan jadi diproduksi, diuji, dimodifikasi dan disimpan, serta terjadi proses pengiriman yang menghubungkan fasilitas-fasilitas tersebut. Badan usaha yang terlibat dalam suatu rantai *supply* meliputi *supplier* bahan mentah, unit produksi, *supplier-supplier* tambahan, penyedia layanan penyimpanan, pengumpul (*assemblers*), distributor, pengecer dan konsumen. Aktivitas yang terjadi pada suatu rantai *supply* adalah mengubah bahan baku dan bahan pendukung menjadi bahan jadi untuk selanjutnya dikirimkan kepada konsumen akhir. Tujuan dibuatnya rantai *supply* adalah untuk memperoleh jaringan yang sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai oleh pengambil keputusan. Sebagai contoh, seorang pengambil keputusan ingin meminimalkan biaya dan memaksimalkan kualitas produk yang diperoleh. Dari sini dipilihlah rantai *supply* yang sesuai dengan tujuan pengambil keputusan tersebut. Rantai *supply* dapat digambarkan seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Rantai *Supply*

Manajeman Rantai *supply* adalah suatu pendekatan yang digunakan untuk membuat kinerja dari suatu kesatuan yang terdiri dari sejumlah *supplier*, pabrik, gudang dan toko menjadi efisien, sedemikian sehingga produk dapat diproduksi dan didistribusikan dalam jumlah yang tepat, dan pada waktu yang tepat pula, guna meminimalkan biaya total dengan tetap memberikan layanan yang memuaskan. Tujuan utama manajemen rantai *supply* adalah untuk memenuhi permintaan pelanggan melalui penggunaan sumber daya yang paling efisien, termasuk kapasitas distribusi, persediaan, dan sumber daya manusia (Normayati, 2011). Berdasarkan Amid, dkk (2011), pemilihan *supplier* adalah masalah multi kriteria yang mencakup faktor kualitatif dan kuantitatif. Kepentingan relatif dari kriteria dan sub kriteria ditentukan oleh pimpinan teratas dan manajer pembelian berdasarkan strategi rantai *supply*.

Pada kenyataannya, pengambil keputusan tidak memiliki informasi yang pasti dan lengkap yang berkaitan dengan kriteria dan batasan keputusan. Dalam kasus ini teori himpunan *fuzzy* adalah salah satu alat terbaik untuk menangani ketidakpastian. Teori himpunan *fuzzy* diaplikasikan pada masalah pemilihan *supplier* karena adanya ketidakjelasan dan ketidaktepatan informasi. Dalam Amid, dkk (2006), disampaikan bahwa Zimmermann telah menggunakan model yang digagas oleh Belman dan Zadeh untuk menyelesaikan masalah program linear multi-objektif *fuzzy*. Pada model ini fungsi tujuan dan fungsi kendala dianggap memiliki tingkat kepentingan yang sama bagi pengambil keputusan, sehingga model ini disebut model yang simeteris. Namun, dalam kegiatan-kegiatan usaha pada umumnya, antara tujuan yang satu dengan tujuan yang lain memiliki tingkat kepentingan yang berbeda bagi pengambil keputusan, tak terkecuali pada masalah pemilihan *supplier*. Oleh karena itu model simetris tidak lagi tepat untuk menyelesaikan masalah pengambilan keputusan dengan beberapa tujuan, dikarenakan tujuan-tujuan tersebut memiliki tingkat kepentingan yang berbeda-beda sehingga kemudian Amid, dkk (2011) mengembangkan sebuah model pembobotan aditif untuk masalah pemilihan *supplier* dengan tujuan untuk menangani input yang tidak tepat dan masalah mendasar dari menentukan bobot kriteria kuantitatif/kualitatif dengan kondisi beberapa sumber dan keterbatasan kapasitas. Namun pada kedua model ini masih terbatas untuk menyelesaikan masalah pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan hanya fungsi objektifnya saja yang bersifat *fuzzy* sedangkan untuk fungsi kendalanya masih bersifat deterministik.

Dalam tulisan ini, model pembobotan aditif multi-objektif *fuzzy* telah dikembangkan untuk memungkinkan para manajer pembelian menetapkan jumlah pesanan ke masing-masing *supplier* berdasarkan strategi rantai *supply*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini mengkaji kembali dan mengembangkan jurnal yang ditulis oleh Amid, dkk (2011). Penelitian ini membahas mengenai bagaimana menyelesaikan masalah pemilihan *supplier* dengan tujuan yang bersifat tidak pasti dengan menggunakan metode pembobotan aditif. Masalah pemilihan *supplier* adalah suatu masalah yang dihadapi dalam suatu rantai *supply*. Simchi-Li dkk(2004), Pibernik dan Sucky (2007) serta Pokharel (2007) dalam Normayarti (2011) memberikan definisi mengenai rantai *supply* dan masalah-masalah yang dihadapi dalam suatu rantai *supply*.

Menurut Amid, dkk (2011), masalah pemilihan *supplier* merupakan masalah program multi-objektif. Winston (1994) memberikan definisi mengenai program multi-objektif. Dalam penelitian ini hanya dibahas mengenai masalah pemilihan *supplier* dengan fungsi objektif dan fungsi kendala yang linear. Dengan kata lain, masalah pemilihan *supplier* yang dibahas merupakan masalah program linear multi-objektif. Sakawa (1993) memberikan definisi dan metode-metode untuk menyelesaikan masalah program linear multi-objektif. Model pemilihan *supplier* yang dinyatakan sebagai program linear multi-objektif disebut sebagai model deterministik.

Pada tulisan ini, model pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dikembangkan dengan fungsi kendalanya juga bersifat *fuzzy* dengan mengacuh pada Nasseri, dkk (2017) serta penyelesaiannya mengacuh pada penyelesaian program linear multi-objektif *fuzzy* dengan parameter *fuzzy* yang diajukan oleh Balan (2016) berdasarkan Nehi dan Alineghad (2008) serta Ramik dan Rimanek (1985). Metode *Analytic Hierarchy Process* (*AHP*) sering digunakan untuk memecahkan masalah yang kompleks dan telah diterapkan dalam berbagai konteks pengambilan keputusan Winston (1994). *AHP* juga memberikan pendekatan terstruktur untuk menentukan bobot kriteria. *AHP* digunakan untuk menentukan bobot kriteria dalam model yang disajikan. Model *fuzzy* ini memungkinkan manajer pembelian tidak hanya mempertimbangkan ketidaktepatan informasi tetapi juga turut mempertimbangkan ketersediaan *supplier* serta keterbatasan kapasitas masing-masing *supplier* dalam menyediakan produk kedalam perhitungan untuk menghitung jumlah pesanan ke masing-masing *supplier*.

3. BILANGAN *FUZZY* SEGITIGA

Bilangan *fuzzy* segitiga sangat berperan dalam proses modifikasi model pembobotan aditif untuk menyelesaikan masalah pemilihan supplier multi-objektif *fuzzy*. Berikut disajikan definisi-definisi mengenai bilangan *fuzzy* segitiga yang dikutip dari Bector(2005), Kalaichelvi dan Janofer (2012) dan Nasseri (2017).

Terdapat dua definisi mengenai bilangan *fuzzy* segitiga. Definisi bilangan *fuzzy* segitiga yang lebih dikenal adalah definisi yang disampaikan oleh Bector (2005).

Definisi 1. *(Bector, 2005) Bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *disebut bilangan fuzzy segitiga jika fungsi keanggotaannya didefnisikan sebagai berikut:*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < a^{(1)}, x > a^{(3)} \\ \dfrac{x - a^{(1)}}{a^{(2)} - a^{(3)}}; & \quad a^{(1)} \le x \le a^{(2)} \\ \dfrac{a^{(3)} - x}{a^{(3)} - a^{(2)}}; & \quad a^{(2)} \le x \le a^{(3)} \\ 1 & ; \quad x = a^{(2)} \end{cases}$$

Bilangan fuzzy segitiga dilambangkan dengan triplet $\tilde{A} = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\right)$ *dan memiliki bentuk segitiga seperti yang disajikan pada Gambar 2(a) dengan* $a^{(1)}$ *merupakan nilai kiri atau batas toleransi kiri,* $a^{(2)}$ *merupakan nilai tengah dan* $a^{(3)}$ *merupakan nilai kanan atau batas toleransi kanan.*

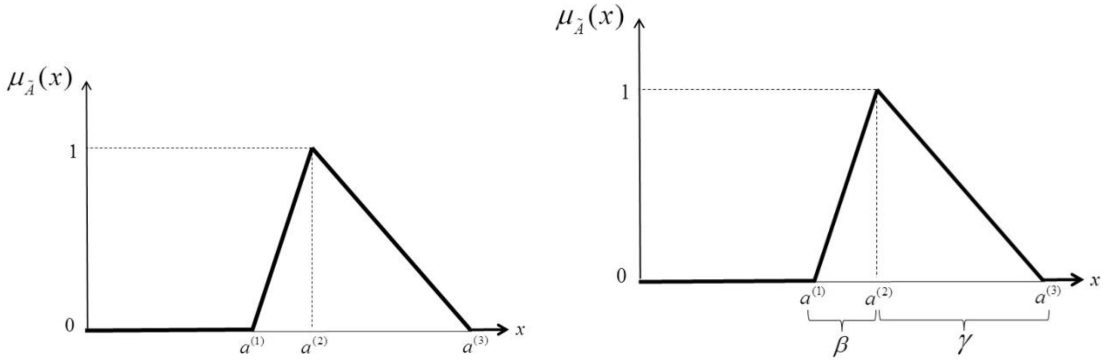
Definisi bilangan *fuzzy* segitiga berikutnya disampaikan oleh Kalaichelvi dan Janofer (2012).

Definisi 2. *(Kalaichelvi dan Janofer, 2012) Bilangan fuzzy* $\tilde{A}$ *disebut bilangan fuzzy segitiga jika fungsi keanggotaannya didefnisikan sebagai berikut:*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le a^{(2)} - \beta, x \ge a^{(2)} + \gamma \\ 1 - \dfrac{a^{(2)} - x}{\beta}; & \quad a^{(2)} - \beta < x < a^{(2)} \\ 1 - \dfrac{x - a^{(2)}}{\gamma}; & \quad a^{(2)} < x < a^{(2)} + \gamma \\ 1 & ; \quad x = a^{(2)} \end{cases}$$

Bilangan fuzzy segitiga dilambangkan dengan triplet $\tilde{A} = \left(a^{(2)}, \beta, \gamma\right)$ *dan memiliki bentuk segitiga seperti yang disajikan pada Gambar 2(b) dengan* $a^{(2)}$ *merupakan nilai rata-rata,* β *merupakan besar toleransi kiri dan* γ *merupakan besar toleransi kanan.*

.



(a) (b)

Gambar 2. Bilangan *fuzzy* segitiga: (a) $\tilde{A} = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\right)$, (b) $\tilde{A} = \left(a^{(2)}, \beta, \gamma\right)$

Definisi 2 sebenarnya adalah bentuk lain dari Definisi 1. Dapat ditunjukan dengan mensubtitusikan $\beta = a^{(2)} - a^{(1)}$ dan $\gamma = a^{(3)} - a^{(2)}$ ke Defnisi 2 maka akan menghasilkan fungsi keanggotaan yang sama pada Definisi 1 dan juga sebaliknya.

4. MODEL PEMILIHAN *SUPPLIER* MULTI-OBJEKTIF *FUZZY* DENGAN FUNGSI OBJEKTIF *FUZZY* DAN KENDALA *FUZZY*

Berdasarkan Amid, dkk (2006) dan Amid, dkk (2011), diperoleh model pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dapat dinyatakan sebagai masalah menentukan **x** = $\left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\right]^T$ yang

meminimalkan $\tilde{z}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \;\tilde{\leq}\; z_k^0, \quad k = 1, 2, ..., p$

memaksimalkan $\tilde{z}_l = \sum_{i=1}^{n} c_{li} x_i \;\tilde{\geq}\; z_l^0, \quad l = p+1, p+2, ..., q$

dengan kendala: (1)

$$\tilde{g}_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ri} x_i \;\tilde{\leq}\; \tilde{b}_r, \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i \leq b_p, \quad p = h+1, h+2, ..., m,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Dengan c_{ki}, c_{li} dan b_p bernilai *crisp*, $\tilde{a}_{ri} = \left(a_{ri}^1, a_{ri}^2, a_{ri}^3\right)$ dan $\tilde{b}_{ri} = \left(b_r^1, b_r^2, b_r^3\right)$ adalah parameter *fuzzy* dari kendala ke-*r*, z_k^0 dan z_l^0 adalah tingkat aspirasi yang ingin dicapai pembuat keputusan dan tanda tilde □ menyatakan lingkungan yang bersifat *fuzzy*. Fungsi keanggotaan untuk masing-masing fungsi objektif *fuzzy* dan parameter kendala *fuzzy* merupakan fungsi linear sebagai berikut:

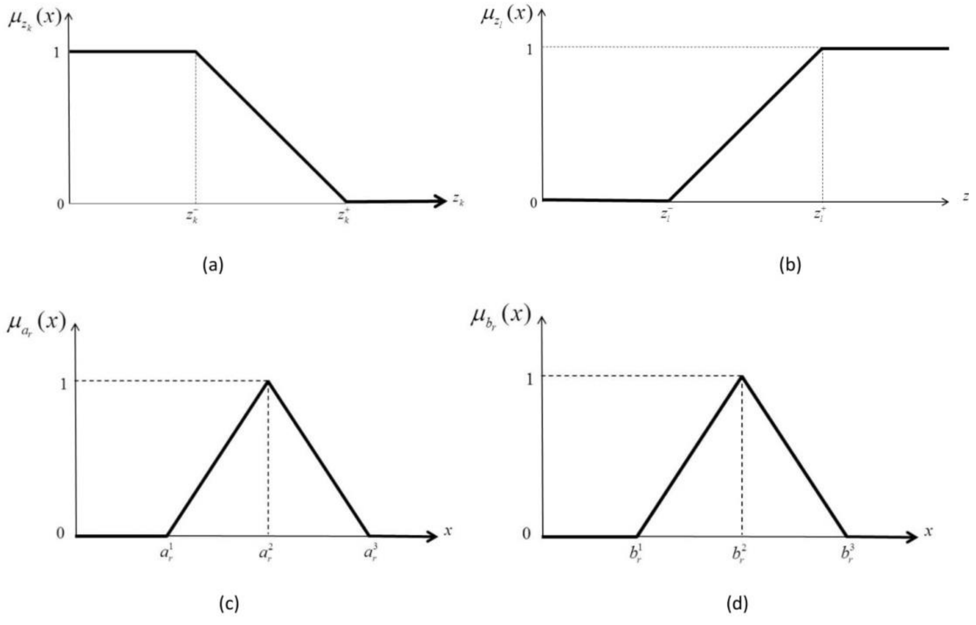
$$\mu_{z_k}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad z_k(x) \leq z_k^- \\ f_{\mu_{zk}} = \dfrac{z_k^+ - z_k(x)}{z_k^+ - z_k^-}; & z_k^- \leq z_k(x) \leq z_k^+, \quad \left(k = 1, 2, ..., p\right) \\ 0 & ; \quad z_k(x) \geq z_k^+ \end{cases} \tag{2}$$

$$\mu_{z_l}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad z_l(x) \geq z_l^+ \\ f_{\mu_{zl}} = \dfrac{z_l(x) - z_l^-}{z_l^+ - z_l^-}; & z_l^- \leq z_l(x) \leq z_l^+, \quad \left(l = p+1, p+2, ..., q\right) \\ 0 & ; \quad z_l(x) \leq z_l^- \end{cases} \tag{3}$$

$$\mu_{a_r}(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<a_r^1, x>a_r^2 \\ \dfrac{x-a_r^1}{a_r^2-a_r^1} ; & a_r^1 \le x \le a_r^2 \\ \dfrac{a_r^3-x}{a_r^3-a_r^2} ; & a_r^2 \le x \le a_r^3\end{cases} \tag{3}$$

$$\mu_{b_r}(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<b_r^1, x>b_r^2 \\ \dfrac{x-b_r^1}{b_r^2-b_r^1} ; & b_r^1 \le x \le b_r^2 \\ \dfrac{b_r^3-x}{b_r^3-b_r^2} ; & b_r^2 \le x \le b_r^3\end{cases} \tag{4}$$

dengan z_l^+, z_l^-, z_k^+, z_k^-, a_r^1, a_r^2, a_r^3, b_r^1, b_r^2 dan b_r^3 masing-masing menyatakan nilai dari fungsi objektif $z_l(x)$ dan $z_k(x)$ serta parameter kendala $a_r(x)$, $b_r(x)$ sedemikian sehingga derajat keanggotaannya 0 dan 1. Fungsi keanggotaan untuk $z_l(x)$, $z_k(x)$, $a_r(x)$ dan $b_r(x)$ dapat diilustrasikan seperti Gambar 3.



Gambar 3. Fungsi Keanggotaan (a) . $z_k(x)$, (b). $z_l(x)$, (c). $a_r(x)$, (d). $b_r(x)$

Program linear (1) merupakan model pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan fungsi objektif *fuzzy* dan kendala *fuzzy* yang mengandung parameter *fuzzy*. Untuk menyelesaikan program linear *fuzzy* seperti ini, Balan (2016) serta Nehi dan Alineghad (2008) mengajukan untuk mengubah kendala *fuzzy* ke bentuk kendala *crisp* dengan mengubah bentuk bilangan *fuzzy* segitiga menjadi bentuk bilangan interval sesuai definisi yang diajukan oleh Ramik dan Rimanek (1985).

Dari definisi bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada Bector (2005) maka himpunan level-α, $\tilde{A}_\alpha$, dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ dapat direpresentasikan oleh interval tertutup yang bergantung pada nilai interval dari α, atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tilde{A}_\alpha(x)=\{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\}=\left[A_\alpha^L, A_\alpha^U\right]$$

dengan A_α^L dan A_α^U masing-masing melambangkan nilai ekstrim kiri dan kanan dari himpunan level-α, $\tilde{A}_\alpha$.

Jika menggunakan definisi bilangan *fuzzy* segitiga seperti pada Definisi 1 maka bentuk interval tertutup yang bergantung pada nilai interval dari α adalah

$$\tilde{A}_\alpha = \left[A_\alpha^L, A_\alpha^U\right] = \left[\left(a^{(2)} - a^{(1)}\right)(\alpha - 1) + a^{(2)}, a^{(2)} - \left(a^{(3)} - a^{(2)}\right)(\alpha - 1)\right]$$

sedangkan jika menggunakan definisi bilangan *fuzzy* segitiga seperti pada Definisi 2 maka bentuk interval tertutup yang bergantung pada nilai interval dari α adalah

$$\tilde{A}_\alpha = \left[A_\alpha^L, A_\alpha^U\right] = \left[\beta(\alpha - 1) + a^{(2)}, a^{(2)} - \gamma(\alpha - 1)\right]$$

Hal ini dijamin oleh lemma berikut.
Lemma 3. *(Nehi dan Alineghad, 2008)*

i. *Jika bilangan fuzzy segitiga* $\tilde{A} = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\right)$ *maka untuk setiap* $\alpha \in [0,1]$ *berlaku:*

$$\tilde{A}_\alpha = \left[A_\alpha^L, A_\alpha^U\right] = \left[\left(a^{(2)} - a^{(1)}\right)(\alpha - 1) + a^{(2)}, a^{(2)} - \left(a^{(3)} - a^{(2)}\right)(\alpha - 1)\right]$$

ii. *Jika bilangan fuzzy segitiga* $\tilde{A} = \left(a^{(2)}, \beta, \gamma\right)$ *maka untuk setiap* $\alpha \in [0,1]$ *berlaku:*

$$\tilde{A}_\alpha = \left[A_\alpha^L, A_\alpha^U\right] = \left[\beta(\alpha - 1) + a^{(2)}, a^{(2)} - \gamma(\alpha - 1)\right].$$

Berikut diberikan beberapa Definisi dan Teorema yang menjelaskan tentang transformasi kendala *fuzzy* ke bentuk kendala deterministik.

Definisi 4. *Diberikan* $\tilde{M}$ *dan* $\tilde{N}$ *dua bilangan fuzzy, maka*

$$\tilde{M} \le \tilde{N} \text{ jika } \tilde{M} \le_L \tilde{N} \text{ dan } \tilde{M} \le_R \tilde{N}$$

$\tilde{M} \le_L \tilde{N}$ *jika* $\inf \tilde{M}_\alpha \le \inf \tilde{N}_\alpha$ *untuk* $\alpha \in [0,1]$ *atau ekuivalen dengan kondisi* $\forall v \in X \exists u \in X$ $\left[u \le v \,\&\, \mu_{\tilde{M}}(u) \ge \mu_{\tilde{N}}(v)\right]$ *sedangkan*
$\tilde{M} \le_R \tilde{N}$ *jika* $\sup \tilde{M}_\alpha \le \sup \tilde{N}_\alpha$ *untuk* $\alpha \in [0,1]$ *atau ekuivalen dengan kondisi* $\forall u \in X \exists v \in X$ $\left[u \le v \,\&\, \mu_{\tilde{M}}(u) \le \mu_{\tilde{N}}(v)\right]$.

Simbol R dan L masing-masing melambangkan relasi sisi kiri dan relasi sisi kanan. Relasi $\tilde{M} \le_R \tilde{N}$ menyatakan bahwa $\tilde{M}$ tidak lebih dari $\tilde{N}$ dan relasi $\tilde{M} \le_L \tilde{N}$ menyatakan bahwa $\tilde{N}$ tidak kurang dari $\tilde{M}$ sehingga relasi $\tilde{M} \le \tilde{N}$ menyatakan bahwa $\tilde{M}$ tidak lebih dari $\tilde{N}$ atau $\tilde{N}$ tidak kurang dari $\tilde{M}$.

Teorema 5. *Diberikan* $\tilde{M}$ *dan* $\tilde{N}$ *dua bilangan fuzzy, maka*

$$\tilde{M} \le \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \vee \tilde{N} = \tilde{N}$$

Berdasarkan Definisi 4 dan Teorema 5, diberikan Teorema berikut.

Teorema 6. *Diberikan* $\tilde{M}$ *dan* $\tilde{N}$ *dua bilangan fuzzy,* $\tilde{M} \vee \tilde{N} = \tilde{N}$ *jika dan hanya jika untuk* $\alpha \in [0,1]$ *berlaku*

$$\inf\left\{x : \mu_{\tilde{N}}(x) \ge \alpha\right\} \ge \inf\left\{x : \mu_{\tilde{M}}(x) \ge \alpha\right\}$$
$$\sup\left\{x : \mu_{\tilde{N}}(x) \ge \alpha\right\} \ge \sup\left\{x : \mu_{\tilde{M}}(x) \ge \alpha\right\}$$

Jika $\tilde{M} = \left(m^{(1)}, m^{(2)}, m^{(3)}\right)$ *dan* $\tilde{N} = \left(n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\right)$ *dua bilangan fuzzy, maka diperoleh*

$$\tilde{M} \le \tilde{N} \Leftrightarrow \begin{cases} m^{(2)} \le n^{(2)} \\ m^{(2)} - \beta \le n^{(2)} - \delta \\ m^{(2)} + \gamma \le n^{(2)} + \tau \end{cases}$$

dengan $\beta = m^{(2)} - m^{(1)}$, $\gamma = m^{(3)} - m^{(2)}$, $\delta = n^{(2)} - n^{(1)}$ *dan* $\tau = n^{(3)} - n^{(2)}$. *Relasi di atas juga berlaku jika bentuk dari* $\tilde{M} = \left(m^{(2)}, \beta, \gamma\right)$ *dan* $\tilde{N} = \left(n^{(2)}, \delta, \tau\right)$.

Berdasarkan Teorema 6, formulasi program linear hasil transformasi yang diajukan oleh Balan (2016) serta Nehi dan Alineghad (2008) adalah sebagai berikut:
menentukan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ yang

meminimalkan $\tilde{z}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \tilde{\leq} z_k^0, \quad k = 1, 2, ..., p$

memaksimalkan $\tilde{z}_l = \sum_{i=1}^{n} c_{li} x_i \tilde{\geq} z_l^0, \quad l = p+1, p+2, ..., q$

dengan kendala: (5)

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}^2 x_i \leq b_r^2, \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 - \beta\right) x_i \leq \left(b_r^2 - \delta\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 + \gamma\right) x_i \leq \left(b_r^2 + \tau\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i \leq b_p, \quad p = h+1, h+2, ..., m,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

dengan $\beta = a_{ri}^2 - a_{ri}^1$, $\delta = b_{ri}^2 - b_{ri}^1$ masing-masing adalah besar toleransi sisi kiri dari dua parameter *fuzzy* $\tilde{a}_{ri}$ dan $\tilde{b}_r$ sementara $\gamma = a_{ri}^3 - a_{ri}^2$, $\tau = b_{ri}^3 - b_{ri}^2$ masing-masing adalah besar toleransi sisi kanan dari dua parameter *fuzzy* $\tilde{a}_{ri}$ dan $\tilde{b}_r$.

Berdasarkan keputusan *fuzzy* simetris (Amid, dkk, 2006) maka model (5) ekuivalen dengan menyelesaikan model determnistik berikut:

menentukan **x** = $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ yang

memaksimalkan $y\left(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda\right) = \lambda$

dengan kendala: (6)

$$\lambda \leq \mu_{z_j}(x), \; j = 1, 2, ..., q,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}^2 x_i \leq b_r^2, \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 - \beta\right) x_i \leq \left(b_r^2 - \delta\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 + \gamma\right) x_i \leq \left(b_r^2 + \tau\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i \leq b_p, \quad p = h+1, h+2, ..., m,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

Model (6) merupakan program linear deterministik atau program linear biasa. Teorema berikut menjamin ekuivalensi dari program linear (5) dan program linear (6).

Teorema 7. *Program linear (5) dikatakan ekuivalen dengan program linear (7) jika memenuhi kondisi-kondisi di bawah ini:*

i. jika $\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* \end{bmatrix}^T$ *adalah pengoptimal (5), maka terdapat* $\lambda^* \geq 0$ *sedemikian sehingga* $\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* & \lambda^* \end{bmatrix}^T$ *pengoptimal (6),* *ii. jika* $\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* & \lambda^* \end{bmatrix}^T$ *adalah pengoptimal (6) untuk suatu* $\lambda^* \geq 0$, *maka* $\begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* \end{bmatrix}^T$ *adalah pengoptimal (5).*

Pada model (6), tingkat kepentingan dari setiap fungsi objektif dianggap sama sehingga model ini disebut dengan model simetris. Jika tingkat kepentingan dari setiap fungsi objektif berbeda maka digunakan model pembobotan aditif yang dikembangkan oleh Amid, dkk (2011). Berdasarkan keputusan nonsimetris (Amid, dkk, 2006), model pembobotan aditif dimodifikasi menjadi sebagai berikut:

menentukan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ yang

memaksimalkan $\sum_{j=1}^{q} w_j \lambda_j$

dengan kendala: (7)

$$\lambda_j \leq f\mu_{Z_j}(x),\ j = 1, 2, ..., q,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}^2 x_i \leq b_r^2, \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 - \beta\right) x_i \leq \left(b_r^2 - \delta\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_r(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ri}^2 + \gamma\right) x_i \leq \left(b_r^2 + \tau\right), \quad r = 1, 2, ..., h,$$

$$g_p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i \leq b_p, \quad p = h+1, h+2, ..., m,$$

$$\lambda_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, ..., q$$

$$\sum_{j=1}^{q} w_j = 1,\ \ w_j \geq 0$$

$$x_i, \lambda \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

dengan

$$f\mu_{z_j}(x) = \begin{cases} f\mu_{z_k}(x) = \dfrac{z_k^+ - z_k(x)}{z_k^+ - z_k^-}; & z_k^- \leq z_k(x) \leq z_k^+, (k = 1, 2, ..., p) \\ f\mu_{z_k}(x) = \dfrac{z_l(x) - z_l^+}{z_l^+ - z_l^-}; & z_l^- \leq z_l(x) \leq z_l^+, (l = p+1, p+2, ..., q) \end{cases}$$

Masalah (7) merupakan masalah program linear deterministik atau program linear biasa, sehingga dapat diselesaikan dengan metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear seperti metode Simpleks. Dengan menyelesaikan (7) diperoleh solusi optimal λ^* dan x^*. Solusi optimal x^* ini merupakan solusi optimal dari MPSMOF (1) dan λ^* merupakan derajat keanggotaan untuk $z_j\left(x^*\right)$, $j = 1, 2, ..., q$. Hal ini dijamin oleh Teorema 8 dan Teorema 9 sebagai berikut.

Teorema 8. *Jika* $x^* \in X$ *adalah solusi optimal tunggal dari masalah pembobotan aditif (7) untuk suatu* $w = \left(w_1, w_2, ..., w_q\right) > 0$, *maka* x^* *adalah solusi optimal Pareto dari MPSMOF (1).*

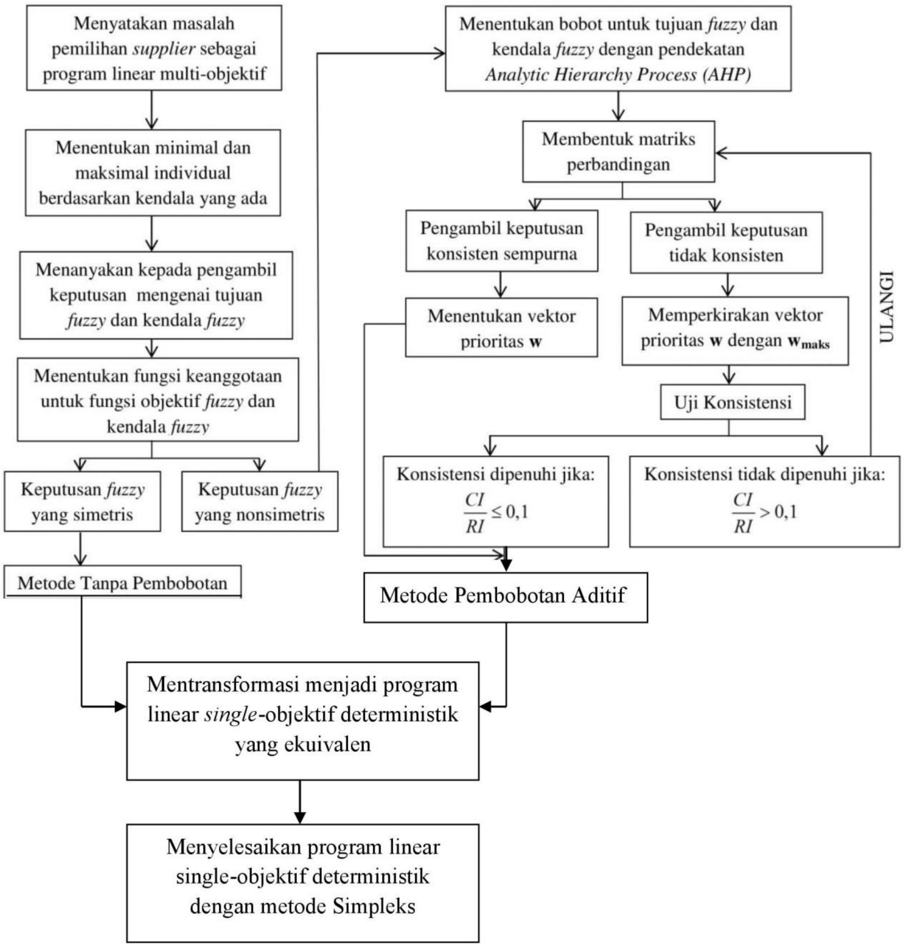
Teorema 9. *Jika* $x^* \in X$ *adalah solusi optimal Pareto dari MPSMOF (1), maka* x^* *adalah solusi optimal dari masalah pembobotan aditif (7) untuk suatu* $w = \left(w_1, w_2, ..., w_q\right) > 0$.

Analytic Hierarchy Process (*AHP*)

Dalam menenttukan bobot setiap fungsi objektif digunakan pendekatan *Analytic Hierarchy Process* (*AHP*). Untuk informasi bagaimana prosedur *AHP* dalam menentukan bobot fungsi objektif dapat dibaca pada Saaty (1987), Teknomo (2006) dan Winston (1994).

Algoritma Model

Gambar 4 di bawah ini menyajikan algoritma dari model pemilihan *supplier* multi-objektif *fuzzy* dengan fungsi objekti *fuzzy* dan kendala *fuzzy* pada rantai *supply*:



Gambar 4. Diagram Alir Algoritma penyelesaian MPSMOF dengan Fungsi Objektif *Fuzzy* dan Kendala *Fuzzy*.

5. CONTOH NUMERIK

Untuk men-*supply* suatu produk makanan baru ke pasar, diasumsikan terdapat tiga *supplier* yang dapat dipilih oleh seorang pengambil keputusan. Ketiga *supplier* tersebut mempunyai kemampuan dan kapasitas yang berbeda dalam menyediakan produk makanan baru tersebut. Pengambil keputusan telah mendapat informasi dari ketiga *supplier* bahwa bahan baku utama untuk membuat produk makanan baru tersebut adalah bahan baku A. Oleh karena dimungkinkan terjadi pengurangan berat takaran per kemasan produk makanan tersebut dari masing-masing *supplier* akibat kenaikan harga bahan baku sehingga komposisi bahan baku A untuk membuat produk makanan baru ini berkisar 88% - 90% dari berat takaran per kemasan.

Terdapat perbedaan kapasitas produksi produk makanan tersebut dari ketiga *supplier*, yaitu untuk *supplier* 1, kapasitas produksinya adalah 28-32 kemasan/hari namun pada umumnya 30 kemasan/hari. Untuk *supplier* 2, kapasitas produksinya adalah 23-27 kemasan/hari namun pada umumnya 25 kemasan/hari sedangkan untuk *supplier* 3, kapasitas produksinya adalah 19-23 kemasan/hari namun pada umumnya 21 kemasan/hari.

Tujuan yang ingin dicapai oleh pengambil keputusan dari pembelian produk baru tersebut adalah meminimalkan biaya pembelian, memaksimalkan kualitas produk yang diperoleh dan memaksimalkan tingkat pelayanan yang akan diperloeh dari *supplier*. Kendala kapasitas *supplier* juga dipertimbangkan dalam model. Diasumsikan bahwa informasi mengenai kinerja *supplier* pada kriteria diatas tidak diketahui secara tepat. Nilai estimasi dari biaya, tingkat kualitas dan pelayanan serta kendala *supplier* disajikan pada Tabel 3. Jumlah hari kerja dalam satu bulan untuk setiap *supplier* adalah 26 hari dan Permintaan pasar yang harus dipenuhi selama sebulan adalah 1000 kemasan. Informasi kuantitatif supplier dirangkum pada Tabel 1.

Tabel 1. Informasi Kuantitatif *Supplier*

Supplier	**Harga (ribu rupiah/kemasan)**	**Kualitas (%)**	**Pelayanan (%)**	**Kapasitas produksi / hari (kemasan)**
Supplier 1	13	80	85	(28, 30, 32)
Supplier 2	11,5	70	75	(23, 25, 27)
Supplier 3	15	95	80	(19, 21, 23)

Berdasarkan langkah-langkah menentukan bobot dengan *Analityc Hierarchy Process* (*AHP*) diperoleh bobot dari biaya, kualitas dan pelayanan, yaitu $w_1 = 0.11$, $w_2 = 0.63$ dan $w_3 = 0.26$. Berdasarkan model pembobotan aditif (7), formulasi *single*-objektif *crisp* untuk masalah ini adalah sebagai berikut:

Tentukan $\left[x_1, x_2, x_3\right]$ yang

Memaksimalkan $0,11\lambda_1 + 0,63\lambda_2 + 0,26\lambda_3$

dengan kendala:

$$\lambda_1 \le \frac{13988 - \left(13x_1 + 11.5x_2 + 15x_3\right)}{1963}$$

$$\lambda_2 \le \frac{\left(0.8x_1 + 0.7x_2 + 0.9x_3\right) - 735}{139.1}$$

$$\lambda_3 \le \frac{\left(0.85x_1 + 0.75x_2 + 0.8x_3\right) - 767.5}{68.9}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$0.89x_1 \le 694.2$$

$$0.88x_1 \le 640.64$$

$$0.90x_1 \le 748.8$$

$$0.89x_2 \le 578.5$$

$$0.88x_2 \le 630.76$$

$$0.90x_2 \le 631.8$$

$$0.89x_3 \le 485.94$$

$$0.88x_3 \le 434.72$$

$$0.90x_3 \le 538.2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$\lambda_j \in \left[0,1\right], \quad j = 1, 2, 3.$$

Dengan menggunakan bantuan *software POM for Windows*, diperoleh solusi optimal untuk formulasi model diatas sebagai berikut:

$x_1 = 506,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 494,\quad Z_1 = 13988,\quad Z_2 = 874,1,\quad Z_3 = 825,3$

Tingkat pencapaian fungsi objektifnya adalah:

$\mu_1 = 0,32,\quad \mu_2 = 0,96,\quad \mu_3 = 1$

Dengan kata lain, untuk meminimalkan biaya pembelian dan memaksimalkan kualitas serta pelayanan yang akan diperoleh, berdasarkan perhitungan dengan metode pembobotan aditif maka pengambil keputusan harus membeli dari *supplier* 1 sebanyak 506 kemasan produk dan dari *supplier* 3 sebanyak 494 kemasan produk dan tidak membeli dari *supplier* 2.

Jika kasus ini juga dikerjakan berdasarkan model tanpa pembobotan atau model simetris (6), diperoleh perbandingan hasil perhitungan seperti disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Informasi Kuantitatif *Supplier*

	Metode	
	Pembobotan Aditif	**Tanpa Pembobotan (Simetris)**
Z_1	13988	80
Z_2	874,1	70
Z_3	82,3	95
x_1	506	0
x_2	0	533
x_3	494	447
μ_1	0,32	0,52
μ_2	0,96	0,52
μ_3	1	0,52

6. KESIMPULAN

Masalah pemilihan *supplier* dengan fungsi objektif dan fungsi kendala yang bersifat *fuzzy* merupakan salah satu contoh nyata dari masalah program linear multi-objektif *fuzzy*. Untuk kasus dimana setiap tujuan *fuzzy* mempunyai tingkat kepentingan yang sama bagi pengambil keputusan, didefinisikan keputusan *fuzzy* yang simetris. Sebaliknya, untuk kasus dimana setiap tujuan *fuzzy* memiliki tingkat kepentingan yang berbeda, didefinisikan keputusan *fuzzy* yang nonsimetris.

Masalah program linear multi-objektif *fuzzy* diselesaikan dengan mentransformasi masalah tersebut menjadi masalah program linear *single*-objektif deterministik berdasarkan definisi dari keputusan *fuzzy*-nya. Untuk keputusan *fuzzy* yang nonsimetris, masalah program linear multi-objektif *fuzzy* dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pembobotan aditif, dengan terlebih dahulu ditentukan bobot untuk setiap fungsi objektif yang merepresentasikan tujuan yang ingin dicapai oleh pengambil keputusan menggunakan pendekatan *Analytic Hierarchy Process* (*AHP*). Metode pembobotan aditif lebih dapat mewakili keadaan real karena dapat merepresentasikan derajat kepentingan dari masing-masing fungsi tujuan.

DAFTAR PUSTAKA

Amid, A., Ghodyspour, S. H. and O'Brien, C. (2006). “Fuzzy Multiobjective Linear Model for Supplier Selection in a Supply Chain”. *Int. J. Production Economics*, 104, 394-407.

Amid, A., Ghodyspour, S. H. and O'Brien, C. (2011). “A Weighted Max-Min Model for Fuzzy Multi-objective Supllier Selection in a Supply Chain”. *Int. J. Production Economics*, 131, 139-145.

Balan, B. (2016). “Solving Muli-Objective Fuzzy Linear Optimization Problems Using Fuzzy Programming Technique”. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 18-21.

Nasseri, H., Mortezania, M. and Mirmohseni, M. (2017). “A New Method for Solving Fully Fuzzy Multi Objective Supplier Selection Problem”. *International Journal of Research in Industrial Engineering* 6 (3), 214-227.

Nehi, H. M. and Alineghad, M. (2008). “Solving Inerval and Fuzzy Multi Objective Linear Programming Problem by Necessarily Efficiency Points”. *International Mathematical Forum* 3 (3), 99-106.

Normayati. (2011). *Aplikasi Program Linear Multiobjektif Fuzzy Pada Masalah Pemilihan Supplier dan Pemograman Komputernya*. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Ramik, J. and Rimanek, J. (1985). Inequality Relation Between Fuzzy Numbers and Its Use in Fuzzy Optimization, *Fuzzy Sets and Systems* 16, 123-138.

Saaty, R. W. (1987). “The Analytic Hierarchy Process - What It is and How It is Used”. *Mathematical Modelling* 9, 161-176.

Sakawa, M. (1993). *Fuzzy Set and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Perss, New York.

Teknomo, K. (2006). *Analytical Hierarchy Process (AHP) Tutorial*, Available at http://people.revoledu.com/kardi/tutorial/AHP/.

Winston, W. L. (1994). *Operations Research Application and Algorithms*, edisi keempat, International Thomson Publishing, California.