

**PENERAPAN MODEL EKSPONENSIAL DAN MODEL LOGISTIK UNTUK PROYEKSI
PENDUDUK TAHUN 2024 (STUDI KASUS BPS KABUPATEN ALOR) KABUPATEN ALOR)**

**APPLICATION OF THE EXPONENTIAL MODEL AND LOGISTIC MODEL FOR
POPULATION PROJECTION IN 2024 (CASE STUDY OF BPS ALOR DISTRICT)**

Puling Tang¹⁾, Eka Tay²⁾

^{1, 2)} Program Studi Matematika dan Universitas Tribuana Kalabahi

Jln. Soekarno Tang-Eng Batunirwala, Kota Kalabahi

¹⁾ melkipulingtang@gmail.com

ABSTRAK

Jumlah laju pertumbuhan penduduk kabupaten Alor setiap tahun terus meningkat. Untuk memperkirakan jumlah penduduk tahun berikutnya biasa digunakan estimasi kependudukan, dipergunakan sebagai dasar perencanaan ekonomi dan sosial untuk mengetahui kebutuhan pada masa mendatang. Model pertumbuhan penduduk dengan model eksponensial dan logistik terkenal dalam menentukan pertumbuhan populasi. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kasus jumlah penduduk di Kabupaten Alor. Data dalam penelitian ini adalah data jumlah penduduk yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Alor dari tahun 2015-2019. Data yang sudah diperoleh diolah dengan menggunakan metode Eksponensial dan Logistik untuk mendapatkan data ramalan atau proyeksi jumlah penduduk Kabupaten Alor pada tahun 2020 Alor. Berdasarkan hasil dari pembahasan diatas model ekponensial dan logistik dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk kabupaten Aor pada tahun 2024. Prediksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024. berdasarkan hasil model eksponensial 2 adalah 212.921 jiwa. Pada model logistik, prediksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024 sebesar 277.062 jiwa.

Kata Kunci: model eksponensial, model logistik.

ABSTRACT

The population growth rate of Alor district continues to increase every year. To estimate the population for the following year, population estimates are usually used, which are used as the basis for economic and social planning to determine future needs. Population growth models with exponential and logistic models are well known in determining population growth. The research method used is a case study of the population in Alor Regency. The data in this study is population data obtained from the Central Statistics Agency (BPS) Alor from 2015-2019. The data that has been obtained is processed using Exponential and Logistics methods to obtain forecast data or projections of the population of Alor Regency in 2020 Alor. Based on the results of the discussion above, exponential and logistic models can be used to predict the population of Aor Regency in 2024. Prediction of the population of Alor Regency in 2024. Based on the results of exponential model 2 is 212,921 people. In the logistic model, the predicted population of Alor district in 2024 is 277,062 people.

Keywords: exponential model, logistic model

A. PENDAHULUAN

Pertumbuhan jumlah penduduk kini semakin tidak dapat dikendalikan. Akibatnya setiap tahun jumlah penduduk di Kabupaten Alor terus meningkat. Dampak ledakan jumlah penduduk dikarenakan semakin tingginya angka pengangguran, kriminalitas, dan memburuknya kondisi sosial lainnya. Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya ledakan penduduk yaitu tingkat kematian yang semakin menurun dan tingkat kelahiran yang semakin tinggi.

Data yang diambil merupakan data berkala, dikumpulkan menurut waktu dari tahun 2015-2019, untuk menggambarkan pertumbuhan jumlah penduduk di Kabupaten Alor setiap tahun. Data berkala tersebut digunakan untuk meramalkan atau mengestimasi jumlah penduduk Kabupaten Alor pada tahun 2024. Selanjutnya data hasil ramalan tersebut dapat berguna untuk dasar pembuatan perencanaan pemerataan penduduk, baik jangka pendek, menengah, atau pun jangka panjang.

B. METODOLOGI PENELITIAN

Prosedur Penelitian :(1) rancangan penelitian; mengambil data BPS Alor dalam angka tahun 2016, 2017, 2018, dan 2019; (2) sasaran penelitian yaitu proyeksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024; (3) teknik pengumpulan data Pada tahapan pengumpulan data langkah-langkah yang digunakan, mengumpulkan data tentang jumlah kelahiran dan kematian berdasarkan data BPS kabupaten Alor melalui internet, selanjutnya menganalisis data dan terakhir menarik kesimpulan.; (4) dan teknik analisis data yaitu penerapan model eksponensial dan model logistik untuk proyeksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Populasi Eksponensial

Hukum Maltus atau hukum pertumbuhan eksponensial berbunyi: Laju pertumbuhan suatu populasi (mikroba, bakteri, serangga, manusia, binatang) sebanding dengan populasi saat itu. Jika y menyatakan jumlah populasi setiap saat, maka Hukum Maltus dinyatakan dengan:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Dengan menyelesaikan $\frac{dy}{dt} = ky$ dengan syarat bahwa $y = y_0$ ketika $t = 0$ dengan memisahkan variabel- variabel dan mengintegrasikan, kita memperoleh

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$\ln y = kt + C$$

syarat $y = y_0$ pada $t = 0$ memberikan $C = \ln y_0$ sehingga

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

Sehingga diperoleh

$$y = y_0 e^{kt}$$

Keterangan

y = jumlah penduduk tahun t

y_0 = jumlah penduduk tahun dasar

t = waktu

Ketika $k > 0$, tipe pertumbuhan ini disebut pertumbuhan eksponensial, dan ketika $k < 0$ disebut peluruhan eksponensial.

2. Model Populasi Logistik

Model populasi logistik adalah model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik. Model ini mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik keseimbangan, pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama. Suatu model logistik diawali dengan model pertumbuhan eksponensial dan menciptakan suatu ekspresi yang mengurangi nilai a ketika P meningkat. Jika ukuran populasi maksimum

Yang dapat dipertahankan $\frac{a}{b}$, maka $\frac{a}{b} - P$ akan memberikan petunjuk berapa banyak individu tambahan yang dapat ditampung oleh lingkungan tersebut, dan $\frac{\frac{a}{b} - P}{\frac{a}{b}} = \frac{a - bP}{a}$ memberikan petunjuk berupa $\frac{a}{b}$ yang masih tersedia untuk pertumbuhan populasi. Persamaan yang telah dimodifikasi menggunakan syarat baru adalah :

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(\frac{a - bP}{a} \right) = \frac{a^2 P - abP^2}{a} = aP - bP^2$$

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

Model ini merupakan persamaan differensial nonlinear yang mempunyai solusi :

$$\frac{dP}{aP-bP^2} = dt$$

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP} \right) dP = \int dt$$

$$\frac{1}{a} \left(\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{b}{a-bP} dP \right) = t + c$$

$$\frac{1}{a} (\ln P - \ln (a - bP)) = t + c$$

Dengan mensubstitusi nilai c, persamaan diatas menjadi :

$$\ln \frac{P(a-bP_0)}{P_0(a-bP)} = at$$

Dengan melakukan pengekspensial pada kedua ruas, diperoleh :

$$\frac{P(a-bP_0)}{P_0(a-bP)} = e^{at}$$

$$P_0(a - bP)e^{at} = P(a - bP_0)$$

$$aP_0e^{at} - bPP_0e^{at} = c$$

$$aP_0e^{at} = P(a - bP_0) + P(bP_0e^{at})$$

$$P = \frac{aP_0e^{at}}{(a-bP_0+bP_0e^{at})} \quad \text{bagi dengan } bP_0e^{at}$$

$$P = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a-bP_0}{bP_0}\right)\frac{1}{e^{at}}} \quad \text{bagi dengan } bP_0e^{at}$$

$$P = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{bP_0}-1\right)\frac{1}{e^{at}}}$$

$$P(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{bP_0}-1\right)e^{-at}}$$

Substitusikan nilai $K = \frac{a}{b}$ ke dalam persamaaan diatas

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0}-1\right)e^{-at}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-at}}$$

Substitusikan nilai $A = \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)$ ke dalam persamaaan diatas

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-at}}$$

Persamaan di atas dikenal sebagai Model populasi logistik.

Tabel 1. Data Penduduk Kabupaten Alor tahun 2016 sampai 2019

Nomor	Tahun	Jumlah penduduk (jiwa)	Laju pertumbuhan(%)
1	2015	199.915	0,80
2	2016	201.515	0,68
3	2017	202.890	0,73
4	2018	204.380	0,60
5	2019	205.599	

Sumber :Kbupaten Alor dalm angka (<https://alorkab.bps.go.id/publication//kabupaten-alor-dalam-angka>)

Langkah selanjutnya data tersebut disajikan sebagai dasar acuan untuk meramalkan jumlah penduduk Kabupaten Alor pada tahun 2024.

Model Eksponensial 1

Mencari nilai K dengan data 2015 ke 2016, artinya $t = 1$ maka diperoleh

$$y = y_0 e^{kt}$$

$$201.515 = 199.915 e^k$$

$$K = \ln \left(\frac{201.515}{199.915} \right)$$

$$K \approx 0,007971544$$

Dasar acuan tahun yang digunakan yaitu tahun 2015 yakni dengan jumlah penduduk 199.915 jiwa, dengan $y_0 = 199.915$ sehingga diperoleh rumus untuk model eksponensial 1 yaitu

$$y = 199.915 e^{0,007971544t}$$

Berdasarkan perhitungan diatas maka diperoleh data proyeksi sebagai berikut:

$$t = 0 , \text{ maka } y = 199.915$$

$$t = 1 , \text{ maka } y = 201.515$$

$$t = 2 , \text{ maka } y = 203.128$$

$$t = 3 , \text{ maka } y = 204.754$$

$$t = 4, \text{ maka } y = 206.392$$

Model Eksponensial 2

Dengan menggunakan pertumbuhan rata-rata penduduk pada tahun 2015 sampai tahun 2019 sehingga diperoleh :

$$0,80 + 0,68 + 0,73 + 0,60 = 2,81$$

$$\Leftrightarrow \frac{2,81}{4} = 0,703$$

Jadi diperoleh pertumbuhan penduduk 0,703 % , kemudian mencari nilai y sebagai berikut :

$$0,703 = \left(\frac{y - y_0}{y_0} \right) 100$$

$$\frac{y_0(0,703)}{100} y - y_0$$

$$y = \frac{y_0(0,703)}{100} + y_0 \quad (1)$$

Diketahui $y_0 = 199.915$ disubstituisikan ke persamaan (1)

$$y = \frac{199.915(0,703)}{100} + 199.915$$

$$y \approx 201.320$$

Kemudian cari nilai k ketika $t = 1$ sehingga diperoleh

$$y = y_0 e^{kt}$$

$$201.320 = 199.915 e^k$$

$$K = \ln \left(\frac{201.320}{199.915} \right)$$

$$K \approx 0.00700341$$

Jadi diperoleh rumus untuk model exponensial 2 yaitu :

$$y = 199.915 e^{0.00700341t}$$

Sedemikian sehingga diperoleh perhitungan prediksi , ketika :

$$t = 0, \text{ maka } y = \mathbf{199.915}$$

$$t = 1, \text{ maka } y = \mathbf{201.320}$$

$$t = 2, \text{ maka } y = \mathbf{202.735}$$

$$t = 3, \text{ maka } y = \mathbf{204.160}$$

$t = 4$, maka $y = 205.599$

Model Eksponensial 3

Mencari nilai K dengan data 2016 ke 2019, artinya $t = 4$ maka diperoleh

$$y = y_0 e^{kt}$$

$$205.599 = 199.915 e^{4k}$$

$$4K = \frac{\ln\left(\frac{205.599}{199.915}\right)}{4}$$

$$K \approx 0.00700885$$

Jadi diperoleh rumus untuk model exponential 3 yaitu :

$$y = 199.915 e^{0.00700885t}$$

Sedemikian sehingga diperoleh perhitungan proyeksi , ketika :

$t = 0$, maka $y = \mathbf{199.915}$

$t = 1$, maka $y = 202.932$

$t = 2$, maka $y = 202.737$

$t = 3$, maka $y = 204.163$

$t = 4$, maka $y = 205.599$

Model Logistik

$$P_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} P = \frac{a}{b} = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{P_1^2 - P_1P_2}$$

$$P_0 = 199.915$$

$$P_1 = 201.515$$

$$P_2 = 202.890$$

maka

$$P = K \approx 277.083$$

Kemudian mencari nilai A sedemikian sehingga diperoleh

SEMINAR NASIONAL SAINS DAN TEKNIK FST UNDANA (SAINSTEK)

Kupang, 02 November 2021

$$\text{nilai } A = \left(\frac{K-P_0}{P_0} \right) = \left(\frac{277.083 - 199.915}{199.915} \right) \approx 0.38600405$$

Maka berdasarkan rumus

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-at}}$$

Ketika $t = 1$,

$$P = \frac{K}{1+Ae^{-a}}$$

$$-a = \ln \left(\frac{\frac{K}{P} - 1}{A} \right) = \ln \left(\frac{\frac{K}{P} - 1}{\frac{K-P_0}{P_0}} \right)$$

$$-a = \ln \left(\frac{P_0 \left(\frac{K}{P} - 1 \right)}{K-P_0} \right)$$

$$-a = -0.951904$$

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-at}}$$

$$P(t) = \frac{277.083}{1+0.38600405e^{-0.951904t}}$$

Sedemikian sehingga diperoleh perhitungan proyeksi, ketika :

$t = 0$, maka $y = 199.915$

$t = 1$, maka $y = 241.151$

$t = 2$, maka $y = 262.013$

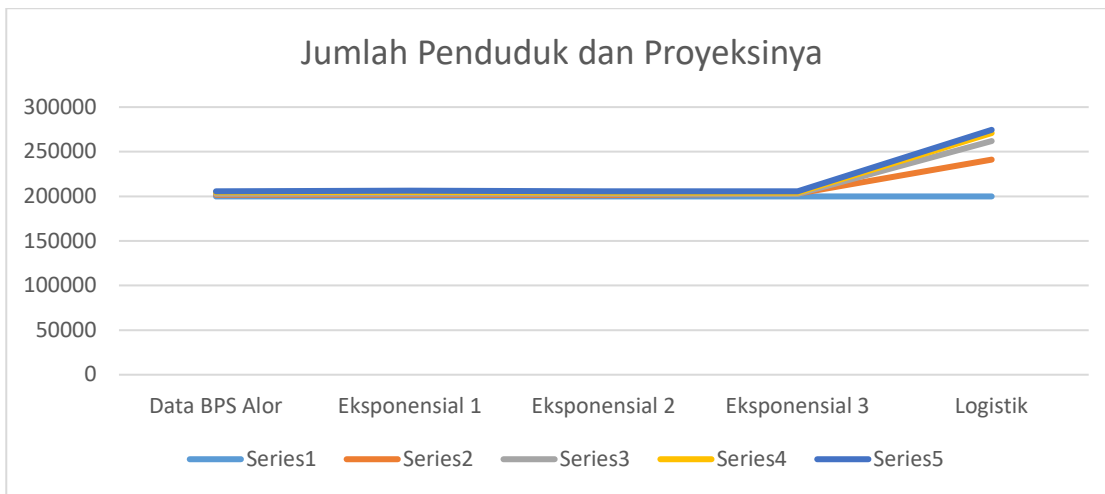
$t = 3$, maka $y = 271.065$

$t = 4$, maka $y = 274.728$

Tabel 2

tahun	Jumlah Penduduk berdasarkan				
	BPS Alor	Exponensial 1	Exponensial 2	Exponensial 3	Logistik
2015	199.915	199.915	199.915	199.915	199.915
2016	201.515	201.515	201.320	202.932	241.151
2017	202.890	203.128	202.735	202.737	262.013
2018	204.380	204.754	204.160	204.163	271.065
2019	205.599	206.392	205.595	205.599	274.728

Tabel 2 di atas dapat terlihat pada gambar berikut



gambar 1 jumlah penduduk dan proyeksinya

D. Kutipan dan Acuan

r adalah laju pertumbuhan intrinsik atau laju pertumbuhan perkapita jika ukuran populasi kecil dari sumber yang terbatas. Laju pertumbuhan intrinsik merupakan laju di mana suatu populasi kelahiran dan atau populasi kematian bertambah besar jika tidak ada gaya yang bergantung pada kepadatan yang mengatur populasi (Kerry dkk, 2017). Jika $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ adalah laju kenaikan populasi, N ukuran populasi kelahiran atau populasi kematian, dan r adalah tingkat peningkatan intrinsik maka berlaku hubungan:

$$\frac{1}{n} \frac{dN}{dt} = r$$

Modifikasi persamaan logistik mempunyai bentuk $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ dengan $K = \frac{a}{b}r$ adalah laju pertumbuhan dan K adalah batas pertumbuhan populasi,

$$N(t) \max = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} = \frac{N_1(2N_0N_2 - N_2N_1 - N_0N_1)}{N_0N_2 - N_1^2} \quad (2)$$

(Castillo-Chavez, 2000)

Penyimpangan terhadap data-data populasi sangatlah kecil dengan kata lain memiliki kemiripan dengan data yang sebenarnya. Pada posisi tersebut jumlah kematian dan kelahiran dianggap sama

sehingga pada grafik mengarah mendekati konstan. Bentuk sederhana pada laju pertumbuhan yang mengakomodasi asumsi tersebut adalah:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = k \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (3)$$

Persamaan (6) jika dikalikan N maka akan diperoleh model persamaan diferensial logistik

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (4)$$

r laju pertumbuhan dan N merupakan daya tampung populasi (ukuran populasi) dimana pertumbuhan populasi dibatasi saat $t \rightarrow \infty$. (Anggreini, 2020)

Menurut (Anggreini, 2020) menyatakan bahwa dari persamaan (4), jika N jauh lebih kecil dari pada K , maka $\frac{N}{K} \rightarrow 0$ dan $\frac{dN}{dt} \approx rN$. Pada saat $N \rightarrow K$ (populasi semakin mengarah pada kapasitas tampung), sehingga $\frac{N}{K} \rightarrow 1$, maka $\frac{dN}{dt} \rightarrow 0$. Pada saat populasi N berada diantara 0 dan K maka ruas kanan bernilai dengan catatan r positif, akibatnya $\frac{dN}{dt} \rightarrow 1$. Populasi menjadi naik. Apabila populasi melebihi beban tampung ($N > K$) untuk populasi kelahiran maka populasi penduduk bertambah. Untuk $N > K$ pada kasus populasi kematian maka populasi tidak melebihi beban tampung, dengan kata lain ($N < K$) artinya bernilai negatif mengakibatkan $\frac{dN}{dt} < 0$ sehingga populasi akan semakin berkurang. Diasumsikan bahwa $\frac{dN}{dt} < 0$ pada kasus populasi kelahiran dan atau $\frac{dN}{dt} > 0$ pada kasus populasi kematian. Solusi persamaan logistik yaitu,

$$N = \frac{Ke^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}} \quad (5)$$

E. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan diatas model ekponensial dan logistik dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk kabupaten Aor pada tahun 2024. Prediksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024. berdasarkan hasil model eksponensial 2 adalah 212.921 jiwa. Pada model logistik, prediksi jumlah penduduk kabupaten Alor tahun 2024 sebesar 277.062 jiwa.

SEMINAR NASIONAL SAINS DAN TEKNIK FST UNDANA (SAINSTEK)

Kupang, 02 November 2021

F. SARAN

Jumlah penduduk setiap tahunnya terus mengalami peningkatan, oleh sebab itu Pemerintah Kabupaten Alor diharapkan dapat mengambil tindakan perihal penentuan pembangunan dan peningkatan sumber daya manusia untuk kesejahteraan masyarakat Kabupaten Alor.

G. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada seluruh civitas UNTRIB Kalabahi, keluarga, sahabat, dan pembaca atas segala saran dan kritikan demi penyempurnaan penulisan ini.

H. DAFTAR PUSTAKA

- Degeng, W.I. (2007). Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan aplikasinya. Jakarta: Graha Ilmu
- Hariato, W. (2017). Jurnal Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Pada Pertumbuhan Penduduk Kediri. Artikel Skripsi. [Online]. Tersedia
- Varberg, dkk. (2008). Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid 1. Jakarta: Erlangga