DIMENSI PARTISI KUAT PADA GRAF CAYLEY GRUP DIHEDRAL DENGAN PEMBANGKIT $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$

On the Strong Partition Dimension of the Cayley Graph of the Dihedral Group with Generator Set H $= \{r, r^{-1}, sr^j\}$

Mentari Ester Marthen[1], Sania Nuban[2], Farly O. Haning[3]
[1, 2, 3]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana
Kupang-Indonesia
[1]e-mail: mentarimarthen02@gmail.com

ABSTRAK

Diberikan suatu graf terhubung $G(V, E)$. Jarak antar dua titik $u, v \in V$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Suatu partisi terurut $\Pi = \{W_1, W_2, \ldots, W_k\}$ dari himpunan titik V pada graf G disebut partisi pembeda kuat dari G, jika setiap titik di G memiliki vektor jarak yang berbeda. Didefinisikan vektor jarak untuk setiap titik $v \in V$ sebagai $(d(v, W_1), d(v, W_2), \ldots, d(v, W_k))$ dengan $d(v, W_i) = \min\{d(v, w) \mid w \in W_i\}$ untuk setiap $i = 1,2, \cdots, k$. Dimensi partisi kuat suatu graf terhubung G, dinotasikan $Pd_s(G)$, adalah jumlah minimum himpunan dalam suatu partisi pembeda kuat pada G. Artikel ini mengkaji dimensi partisi kuat graf Cayley Grup Dihedral $D_{2n}, n \geq 3$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$. Graf Cayley yang dihasilkan merupakan Graf 3-Regular, yang isomorfik Graf Prisma dengan $Pd_s(Cay(D_{2n}, H) = 3$ untuk $n = 3, n \geq 5$ dan $Pd_s(Cay(D_{2n}, H) = 4$ untuk $n = 4$.
Kata Kunci: dimensi partisi kuat, graf Cayley, graf prisma, grup dihedral, partisi pembeda kuat, teori graf.

ABSTRACT

Let $G(V, E)$ be a connected graph. The distance between two vertices $u, v \in V$ is the length of the shortest path from u to v in G, denoted $d(u, v)$. An ordered partition $\Pi = \{W_1, W_2, \ldots, W_k\}$ of the vertex set V of a graph G is called a strong resolving partition of G If every vertex in G has a unique distance vector. The distance vector of each vertex $v \in V$ is defined as $(d(v, W_1), d(v, W_2), \ldots, d(v, W_k))$, where $d(v, W_i) = min\{d(v, w) \mid w \in W_i\}$ for each $i = 1,2, \cdots, k$. The strong partition dimension of a connected graph G, denoted $Pd_s(G)$, is the minimum number of sets in any strong resolving partition of G. This article examines the strong partition dimension of the Cayley graph of the dihedral group $D_{2n} (n \geq 3)$ with a generating set $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$. The resulting Cayley graph is 3-regular and isomorphic to a prism graph, with $Pd_s(Cay(D_{2n}, H) = 3$ for $n = 3$, $n \geq 5$ and $Pd_s(Cay(D_{2n}, H) = 4$ for $n = 4$.
***Keywords**: strong partition dimension, Cayley graph, prism graph, dihedral group, strong resolving partition, graph theory.*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari hubungan antar objek melalui representasi berupa titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Konsep graf banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti ilmu komputer, jaringan komunikasi, hingga ilmu sosial, karena mampu merepresentasikan keterhubungan antar elemen secara sederhana namun informatif. Secara formal, graf didefinisikan sebagai pasangan terurut

ISBN

$G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi (Harris dkk., 2008).

Salah satu graf yang memiliki keterikatan erat dengan struktur aljabar adalah graf Cayley. Graf Cayley ($Cay(G, H)$) dibangun dari grup G di mana elemen-elemen pada grup direpresentasikan sebagai titik-titik dalam graf dan sisinya ditentukan oleh subhimpunan H di G yang tidak mengandung elemen identitas grup. Sisi-sisi pada graf Cayley menghubungkan elemen $g \in G$ jika $gh^{-1} \in H$. Dengan kata lain, $g \in G$ terhubung ke $g_1 \in G$ jika $g_1 = gh$ untuk setiap $h \in H$. Kajian struktur graf Cayley atas grup hingga telah banyak dilakukan (Erskine, 2015). Penelitian yang dilakukan oleh M. Gia, dkk, pada tahun 2024, telah memberikan gambaran tentang graf Cayley pada grup dihedral $D_{2n} = \langle r, s | r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$ di mana r adalah elemen rotasi, s adalah elemen refleksi. Pemilihan subhimpunan H yang *inverse-closed* yaitu $h^{-1} \in H$ untuk setiap $h \in H$ menjamin graf $Cay(D_{2n}, H)$ tidak berarah. Beberapa karakteristik graf yang dihasilkan adalah graf yang terhubung. (Mae dkk, 2024) menunjukkan graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan himpunan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$, di mana j adalah indeks yang menentukan variasi refleksi dalam pembangkit, memiliki struktur berbentuk graf 3-reguler.

Dalam perkembangan teori graf, muncul konsep dimensi partisi, yang mengukur seberapa kecil partisi simpul graf dapat digunakan untuk membedakan simpul secara unik (Yero & Rodriquez-Velazquez, 2010). Gilang Arya Liza (2017) mempublikasikan artikel Dimensi Partisi dari Graf Persahabatan yang mengkaji penentuan dimensi partisi (pd(G)) pada graf persahabatan f_n. Konsep ini kemudian dikaji lebih lanjut pada graf Cayley, untuk melihat bagaimana sifat aljabar grup memengaruhi dimensi partisinya (Liza, 2019). Salah satu penerapan dimensi partisi adalah pada navigasi robot (Khuller dkk., 1996)

Dalam (González Yero, 2014), konsep dimensi partisi dikembangkan menjadi dimensi partisi kuat. Diberikan suatu graf terhubung $G(V, E)$. Jarak antar dua titik $u, v \in V$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Suatu partisi terurut $\Pi = \{W_1, W_2, \ldots, W_k\}$ dari himpunan titik V pada graf G disebut partisi pembeda kuat dari G, jika setiap titik di G memiliki vektor jarak yang berbeda. Didefinisikan vektor jarak untuk setiap titik $v \in V$ sebagai $(d(v, W_1), d(v, W_2), \ldots, d(v, W_k))$ dengan $d(v, W_i) = \min\{d(v, w) \mid w \in W_i\}$ untuk setiap $i = 1,2, \cdots, k$. Dimensi partisi kuat suatu graf terhubung G, dinotasikan ($Pd_s(G)$, adalah jumlah minimum himpunan dalam suatu partisi pembeda kuat pada G.

Eksplorasi struktur dan sifat-sifat graf Cayley dari grup Dihedral telah banyak dilakukan (Riyas & Geetha, 2017); (AL-Kaseasbeh & Erfanian, 2021); (Zhou dkk., 2018); (Okal dkk., 2019). Salah satunya dimensi partisi pada graf $Cay(D_{2n}, H)$ (Riyas & Geetha, 2017). Namun, masih terbatas penelitian yang mengkaji dimensi partisi kuat graf Cayley Grup Dihedral $D_{2n}, n \geq 3$ dengan pembangkit yang *inverse-closed*. Untuk itu, peneliti ingin mengkaji dimensi partisi kuat graf Cayley Grup Dihedral $D_{2n}, n \geq 3$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$. Dengan mempelajari kasus ini, diperoleh pemahaman baru mengenai hubungan antara struktur graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan dimensi partisi kuat, sekaligus memberikan kontribusi terhadap kajian teori graf aljabar.

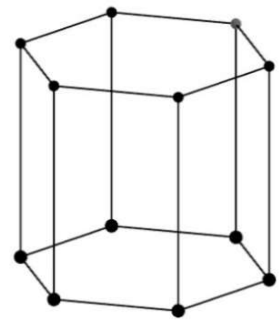
METODOLOGI PENELITIAN

Prosedur Penelitian

Penelitian ini mengkaji dimensi partisi kuat pada graf Cayley atas grup Dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$. Langkah-langkah kajian meliputi (1) mengumpulkan literatur terkait graf Cayley atas grup Dihedral D_{2n} dan dimensi partisi serta dimensi partisi kuat dari graf; (2) menentukan bentuk struktur graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$; (3) membentuk partisi terurut $\Pi = \{W_1, W_2, \dots, W_k\}$ pada graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$ dimulai dari $k = 2$; (4) melakukan uji partisi pembeda yaitu mengecek keunikan vektor jarak dari setiap titik pada graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$; (5) jika vektor jarak tidak unik, maka ulangi langkah ke-3 hingga menemukan partisi pembeda dengan k paling minimal, yang membuat vektor jarak setiap titik berbeda. Analisis data dilakukan dengan *trial* dan *error* hingga menemukan partisi pembeda dengan k paling minimal. Nilai k adalah nilai dimensi partisi kuat dari graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Struktur graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$, di mana j adalah variasi indeks pada elemen refleksi pada D_{2n},membentuk graf 3-reguler yang isomorfik dengan graf Prisma $Y_n = C_n \square K_2, n \geq 3$. Dalam teori graf, graf *k*-reguler adalah graf yang setiap titiknya memiliki derajat *k*. Derajat suatu titik pada graf menyatakan banyaknya sisi yang melekat pada titik tersebut (Diestel, 2017). Jadi, graf 3-reguler adalah graf yang setiap titiknya memiliki derajat 3. Gambar 1 adalah contoh graf 3 reguler isomorfik dengan graf Prisma Y_6, yang memiliki 12 titik. Graf Prisma Y_6 isomorfik dengan graf $Cay(D_{12}, H)$ dengan $H = \{r, r^5, sr^j\}$ di mana $j = 0,1, \cdots 5$.



Gambar 1. Graf Prisma Y_6

Lema berikut menunjukkan bahwa graf Cayley grup Dihedral dengan $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$, r adalah elemen rotasi, s adalah elemen refleksi dan $j = 0,1,\cdots,n-1$ untuk $n \geq 3$ isomorfik dengan graf Prisma $Y_n = C_n \square K_2$. Dengan kata lain, graf Prisma adalah graf hasil kali kartesian antara graf Siklus C_n dan graf Lengkap K_2.

Lema 1. Graf $Cay(D_{2n}, H) \cong Y_n$ jika $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$, r adalah elemen rotasi, s adalah elemen refleksi dan $j = 0,1,\cdots,n-1$ untuk $n \geq 3$.

Bukti. Perhatikan setiap titik pada $D_{2n} = \{e, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Ini berarti pada graf $Cay(D_{2n}, H)$ memiliki $2n$ titik. Jelas titik e akan terhubung ke tiga titik r, r^{-1}, sr^j pada H. Pada titik-titik r^t diperoleh

$$r^t \cdot r = r^{t+1}$$

$$r^t \cdot r^{-1} = r^{t-1}$$

$$r^t \cdot sr^j = sr^{j-t}$$

Ini berarti dua titik yang terhubung ke r^t ada di elemen rotasi dan satu titiknya terhubung ke elemen refleksi. Selanjutmya, pada titik-titik sr^t diperoleh

$$sr^t \cdot r = sr^{t+1}$$

$$sr^t \cdot r^{-1} = sr^{t-1}$$

$$sr^t \cdot sr^j = r^{j-t}$$

Hal ini menandakan, dua titik yang terhubung berada di elemen refleksi dan satu lainnya berada di rotasi. Dapat disimpulkan setiap titik di rotasi terhubung ke dua titik di rotasi dan satu titik di refleksi. Demikian juga setiap titik di refleksi akan terhubung ke dua titik di refleksi dan satu titik di rotasi. Struktur graf Prisma $Y_n = C_n \square K_2$ memiliki dua salinan graf C_n dan sisi-sisi vertikal yang menghubungkan dua siklus tersebut. Terbukti $Cay(D_{2n}, \{r, r^{-1}, sr^j\}) \cong Y_n$.

Selanjutnya, dimensi partisi kuat dari graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$ dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 1. Diberikan graf Prisma $Y_n = C_n \square K_2$ dengan $n \geq 3$. Maka

$$Pd_s(Y_n) = \begin{cases} 3, \text{untuk } n \neq 4 \\ 4, \text{untuk } n = 4 \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan Lema 1, telah diketahui graf $Cay\left(D_{2n}, \{r, r^{-1}, sr^j\}\right) \cong Y_n$ sehingga fokus pembuktian dimensi partisi kuat adalah pada graf Prisma Y_n dengan $n \geq 3$. Misalkan $V(Y_n) = \{u_i, v_i | i = 1,2, \cdots, n\}$ dan $E(Y_n) = \{u_i v_i, u_i u_j, v_i v_j\}$ dengan metrik

$$d(u_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = j \\ 1 + (d(v_i, v_j), & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

$d(u_i, u_j)$ dan $d(v_i, v_j)$ mengikuti jarak pada graf Siklus C_n.

Pertama-tama ditunjukkan untuk $n \neq 4$, dimensi partisi kuat $Pd_s(Y_n) = 3$. Untuk pembuktian $Pd_s(Y_n) \geq 3$, diandaikan $Pd_s(Y_n) < 3$, katakanlah $Pd_s(Y_n) = 2$. Partisi $\Pi = \{W_1, W_2\}$ bukan partisi pembeda sebab beberapa titik pada graf akan memiliki vektor jarak yang sama. Struktur graf Y_n sangat simetris sehingga selalu terdapat minimal dua titik yang memiliki vektor jarak yang sama. Hal ini kontradiksi dengan definisi partisi pembeda sehingga haruslah $Pd_s(Y_n) \geq 3$. Selanjutnya, untuk $Pd_s(Y_n) \leq 3$, dapat dikonstruksi $\Pi = \{W_1, W_2, W_3\}$ dengan $W_1 = V - \{u_1, u_k\}$, $W_2 = \{u_1\}$, $W_3 = \{u_k\}$,$k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Jarak tiap titik v_i ke titik u_1 dan u_k dapat membedakan banyak titik. Jika ada titik yang simetris yaitu jaraknya sama ke u_1 dan u_k maka jarak ke W_1 akan berbeda sehingga vektor jaraknya tetap unik. Ini berarti terbukti dimensi partisi kuat $Pd_s(Y_n) = 3$.

Selanjutnya, akan dibuktikan untuk $n = 4$, graf ini berbentuk kubus Q_3, dimensi partisi kuat $Pd_s(Y_n) = 4$. Untuk itu, perlu dibuktikan $Pd_s(Y_n) \geq 4$ dan $Pd_s(Y_n) \leq 4$. Diandaikan $d_s(Y_n) < 4$, katakanlah $d_s(Y_n) = 3$. Pada kubus simetri titik-titik sangat kuat, sehingga saat dicoba partisi menjadi 3 himpunan, akan ada titik-titik yang vektor jaraknya sama. Dua titik yang saling berhadapan di kubus mempunyai vektor jarak yang sama ke partisi Π. Sehingga terbukti haruslah $d_s(Y_n) \geq 4$. Berikutnya ditunjukkan $Pd_s(Y_n) \leq 4$ dengan membentuk $\Pi = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ yaitu $W_1 = \{u_1\}, W_2 = \{u_3\}$, $W_3 = \{v_4\}$ dan $W_4 = \{u_2, u_4, v_1, v_2, v_3\}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $v \in Y_n$ berlaku

$$d(v|\Pi) = (d(v, W_1), d(v, W_2), d(v, W_3), d(v, W_4)$$

sehingga diperoleh

$$d(u_1|\Pi) = (0,2,21)\ ;\ d(u_2|\Pi) = (1,3,3,0)\ ;$$

$$d(u_3|\Pi) = (2,0,2,1)\ ;\ d(u_4|\Pi) = (1,1,1,0)\ ;$$

$$d(v_1|\Pi) = (1,3,1,0)\ ;\ d(v_2|\Pi) = (2,2,2,0)\ ;$$

$$d(v_3|\Pi) = (3,1,1,0)\ ;\ d(v_4|\Pi) = (2,2,0,1).$$

Dengan demikian terbukti bahwa $Pd_s(Y_n) = 4$ untuk $n = 4$.

KESIMPULAN

Hasil penelitian menunjukan graf $Cay(D_{2n}, H)$ dengan pembangkit $H = \{r, r^{-1}, sr^j\}$, di mana j adalah variasi indeks pada elemen refleksi pada D_{2n},membentuk graf 3-reguler yang isomorfik dengan graf Prisma $Y_n = C_n \square K_2, n \geq 3$. Dimensi partisi kuat graf Prisma Y_n adalah 3 untuk $n \neq 4$ dan bernilai 4 untuk $n = 4$. Saat $n = 4$ graf prisma Y_n berbentuk kubus sehingga merupakan kasus khusus.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis berterimakasih atas bantuan perangkat kecerdasan buatan OpenAI ChatGPT yang digunakan dalam merapikan beberapa bagian penjelasan serta untuk mengecek konsistensi logika pada artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

AL-Kaseasbeh, S., & Erfanian, A. (2021). The structure of Cayley graphs of dihedral groups of Valencies 1, 2 and 3. *Proyecciones (Antofagasta)*, *40*(6), 1683–1691. https://doi.org/10.22199/issn.0717-6279-4357-4429

Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (Vol. 173). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3

Erskine, G. (2015). Diameter 2 Cayley graphs of dihedral groups. *Discrete Mathematics*, *338*(6), 1022–1024. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.01.023

González Yero, I. (2014). On the Strong Partition Dimension of Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, *21*(3), P3.14. https://doi.org/10.37236/3474

Harris, J., Hirst, J. L., & Mossinghoff, M. (2008). *Combinatorics and Graph Theory*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-79711-3

Khuller, S., Raghavachari, B., & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *70*(3), 217–229. https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00106-2

Liza, G. A. (2019). *DIMENSI PARTISI DARI GRAF PERSAHABATAN*.

Okal, M., Kiftiah, M., & Fran, F. (2019). *Graf Cayley pada Sn*. *08*, 9.

Gia, Marselina., Putra, Ganesha L., Haning, Farly O. (2025). *GRAF CAYLEY PADA GRUP DIHEDRAL D*.

Riyas, A., & Geetha, K. (2017). *A Study on Cayley Graphs over Dihedral Groups*.

Yero, I. G., & Rodriquez-Velazquez, J. A. (2010). A note on the partition dimension of Cartesian product graphs. *Applied Mathematics and Computation*, *217*(7), 3571–3574. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.08.038

Zhou, H., Xu, L., Cui, Y., Ding, Q., Luo, Y., Gao, X., & Yang, D. (2018). *Hamiltonian decomposition of the Cayley graph on the dihedral group D_{2p} where p is a prime* (No. arXiv:1810.07866). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.07866